

(4) أوجد قيم  $n$  بحيث  $S_n$  يقبل القسمة على 7

(5) نضع  $T_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

برهن أن  $[7] S_n = T_n$  ثم استنتج قيم  $n$  بحيث  $T_n$  يقبل القسمة على 7

هل توجد أعداد صحيحة  $z, y, x$  بحيث  $9x^2 - 3y^2 - 4z = 4$

$a$  - رقم غير معدوم نضع  $A = \overline{aaa}$  حيث  $A$  مكتوب في نظام التعداد ذو الأساس

10 برهن أن  $A$  يقبل القسمة على 37

( $\gamma$ ) - التحنى البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد ومتجانس ( $0, i, j$ )

حيث  $f(x) = \sqrt{x^2 - 17}$

- أوجد جميع النقاط  $M(x, y)$  من ( $\gamma$ ) بحيث  $x$  و  $y$  طبيعيان.

- من أجل كل قضية عين الصحيحة والخاصة لكل منها مع تحرير الإجابة

(1) إذا كان  $a = 3[49]$  فإن  $a = 3[7]$

(2) إذا كان  $a$  و  $b$  عدنان طبيعان غير معلومين وإذا كان  $d$  قاسم المشترك لـ

$3a + 5b$  و  $2a + 3b$  فإن  $d$  يقسم  $4b$

(3) إذا كان  $r$  باقي قسمة  $a$  على  $q$  فإن  $r^2$  هو باقي قسمة  $a^2$  على  $q$

## الدرس 16

# القواسم والمضاعفات والأعداد الأولية

### 1. القاسم المشترك الأكبر

#### 1.1 القواسم المشتركة لعددين طبيعيين

- من أجل كل عدد طبيعي  $a$  نرمز بـ  $\mathcal{D}(a)$  إلى مجموعة قواسم  $a$

- من أجل كل عددين طبيعيين  $a$  و  $b$  نرمز بـ  $\mathcal{D}(a, b)$  إلى مجموعة القواسم المشتركة

لـ  $a$  و  $b$  وعليه  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a) \cap \mathcal{D}(b)$

واضح أن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a)$

مثال -

$$\mathcal{D}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

$$\mathcal{D}(40) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$$

$$\mathcal{D}(36, 40) = \mathcal{D}(36) \cap \mathcal{D}(40) = \{1, 2, 4\}$$

#### 2.1 القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

$a$  و  $b$  عدنان طبيعان غير معلومين و  $\mathcal{D}(a, b)$  مجموعة القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$ .

المجموعة  $\mathcal{D}(a, b)$  غير خالية لأنها تشمل دائما العدد 1

المجموعة  $\mathcal{D}(a, b)$  منتهية ومحدودة من الأعلى لأن  $\mathcal{D}(a)$  و  $\mathcal{D}(b)$  منتهيتان

ومحدودتان من الأعلى وعناصرها كلها أصغر أو يساوي من  $a$  و  $b$ .



إذن المجموعة  $\mathcal{D}(a, b)$  لها عنصر أكبر والذي نسميه بالقاسم المشترك الأكبر للعديدين  $a$  و  $b$ .  
ترمز بـ  $PGCD$  إلى القاسم المشترك الأكبر.

### ملاحظة

- 1) لمعرفة مجموعة القواسم السالبة للعدد  $a$  يكفي أخذ كل نظائر عناصر  $\mathcal{D}(a)$
- 2) القاسم المشترك الأكبر لعديدين صحيحين يعرف بنفس الطريقة وعندئذ فإن قيمته هي القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $|a|$  و  $|b|$ .

### مثال -

$$PGCD(36, 40) = 4 \text{ ومنه } \mathcal{D}(36, 40) = \{1, 2, 4\}$$

$$PGCD(3, 5) = 1 \text{ ومنه } \mathcal{D}(3, 5) = \{1\}$$

### نتيجة

- 1) مهما يكن العدد الطبيعي  $C$  فإن  $\mathcal{D}(c, 0) = \mathcal{D}(c)$
- 2) إذا كان  $a$  يقبل القسمة على  $b$  فإن  $b$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$
- 3) إذا كان  $a = b$  فإن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a)$

### تمرين تدريبي 1

- $n$  عدد طبيعي،  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين بحيث  $a = n+4$  و  $b = 2n+3$
- 1) بين أنه إذا قسم عدد طبيعي  $d$  العديدين  $a$  و  $b$  فإنه يقسم 5. مستنتجا القيم الممكنة لـ  $PGCD(a, b)$
  - 2) أوجد حسب قيم  $n$  قيمة  $PGCD(a, b)$

### الحل

- 1) بما أن  $d$  يقسم  $a$  و  $b$  يقسم  $b$  فإن  $d$  يقسم  $2a$  ويقسم  $b$  وبالتالي  $d$  يقسم  $2a - b$  أي يقسم 5 وعليه القيم الممكنة لـ  $PGCD(a, b)$  هي 1 و 5
- 2) الطريقة الأولى  
نبحث عن قيم  $n$  بحيث  $PGCD(a, b) = 5$   
بما أن  $d = 5$  فإن  $a = 5k$  مع  $k$  عدد طبيعي غير معلوم  
 $a = 5k$  يكافئ  $n+4 = 5k$  ومنه  $n = 5k - 4$   
نعوض عبارة  $n$  في  $b$  نجد  $b = 10k - 5$   
نلاحظ أن  $b$  موجب وقابل للقسمة على 5  
إذن إذا كان  $n = 5k - 4$  مع  $k$  غير معلوم فإن  $PGCD(a, b) = 5$   
وإذا كان  $n \neq 5k - 4$  فإن  $PGCD(a, b) = 1$

### الطريقة الثانية

5 يقسم  $a$  هذا يعني أن  $5 \mid a$  أي  $n+4 = 5$  مع  $n \in \mathbb{N}$   
ومنه ينتج  $n = 5k+1$  مع  $k \in \mathbb{N}$   
من أجل قيم  $n$  السابقة نجد  $h = 0$   
إذن إذا كان  $n = 5$  فإن  $PGCD(a, b) = 5$   
وإذا كان غير ذلك فإن  $PGCD(a, b) = 1$

### تمرين تدريبي 2

- $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين حيث  $a \geq 2b$
- أ) بين أن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a - 2b)$
  - ب) باستعمال نتيجة السؤال أ) لعدة مرات استنتج خوارزمية تسمح بإيجاد  $\mathcal{D}(66, 30)$

### الحل

- أ) - إذا كان  $d$  ينتمي إلى  $\mathcal{D}(a, b)$  فإن  $d$  يقسم  $a$  و  $b$   
إذن  $d$  يقسم  $a - 2b$  و  $b$  يقسم  $b$   
وبالتالي  $d$  ينتمي إلى  $\mathcal{D}(b, a - 2b)$  ..... (1)  
- إذا كان  $d$  ينتمي إلى  $\mathcal{D}(b, a - 2b)$  فإن  $d$  يقسم  $b$  و  $a - 2b$  وبالتالي  $d$  يقسم  $2b$  ويقسم  $a - 2b$   
إذن  $d$  يقسم  $a - 2b + 2b$  ويقسم  $b$  وبالتالي يقسم  $a$  و  $b$   
إذن  $d$  ينتمي إلى  $\mathcal{D}(a, b)$  ..... (2)  
من (1) و (2) نجد  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, a - 2b)$
- ب) نضع  $a = 66$  و  $b = 30$   
 $\mathcal{D}(66, 30) = \mathcal{D}(30, 6) = \mathcal{D}(6, 18) = \mathcal{D}(18, 6)$   
 $= \mathcal{D}(6, 6) = \{1, 6\}$

### 3.1 تعيين القاسم المشترك الأكبر باستعمال خوارزمية إقليدس

#### مرهنة

القسمة الإقليدية لـ  $a$  على  $b$  تعطي  $a = bq + r$  مع  $r \geq 0$  (عندئذ تكون القواسم المشتركة لـ  $a$  و  $b$  هي القواسم المشتركة لـ  $b$  و  $r$ )  
أي  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$  و كحالة خاصة إذا كان  $r = 0$  فإن:  
 $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, 0) = \mathcal{D}(b)$

#### الإثبات

لإثبات أن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$  نبين أن كل عنصر من إحدى المجموعتين هو عنصر من الأخرى.  
أ) لنبين أن كل قاسم  $c$  لـ  $a$  و  $b$  يقسم أيضا  $r$ .  
بما أن  $c$  يقسم  $b$  فإنه يكفي أن نبين أن  $c$  يقسم  $r$  لكن  $r = a - bq$



بما أن  $c$  يقسم  $a$  و  $b$  فإن  $c$  يقسم  $a-bq$  وبالتالي يقسم  $r$ .

(ب) لنبين أن كل قاسم  $d$  لـ  $b$  و  $r$  يقسم أيضا  $a$  و  $b$  لذلك يكفي أن نبين أنه يقسم  $a$

$$a = bq + r$$

بما أن  $d$  يقسم  $b$  و  $r$  فإن  $d$  يقسم أيضا  $a$ .

من (أ) و (ب) نستنتج أن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r)$

### خوارزمية إقليدس

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيان.

إذا كان  $b$  يقسم  $a$  فإن  $\mathcal{D}(a, b) = b$

إذا كان  $b$  لا يقسم  $a$  فإن البحث عن  $\mathcal{D}(a, b)$  يؤدي بنا للبحث عن  $\mathcal{D}(b, r)$ .

بما أن  $0 \leq r < b$  فإن القسمة الإقليدية لـ  $b$  على  $r$  تعطي  $b = qr + r_1$

وبالتالي  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r) = \mathcal{D}(r, r_1)$

حيث  $0 \leq r_1 < r$

القسمة الإقليدية لـ  $r$  على  $r_1$  تعطي لنا  $r = q_2 r_1 + r_2$

وبالتالي  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r) = \mathcal{D}(r, r_1) = \mathcal{D}(r_1, r_2)$

وهكذا دواليك طالما لا نتحصل على باقي قسمة معدوم

في مرحلة معينة سنتحصل بالتأكيد على باقي قسمة معدوم لأن البواقي التتالية:

$r, r_1, r_2, \dots, r_n$  هي أعداد موجبة متناقصة وعليه نتحصل على المساواة:

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(b, r) = \mathcal{D}(r, r_1) = \dots = \mathcal{D}(r_n, 0)$$

لكن  $\mathcal{D}(r_n, 0) = \mathcal{D}(r_n)$

إذن  $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(r_n)$

بما أن  $r_n$  هو العنصر الأكبر في  $\mathcal{D}(r_n)$  فإن  $r_n$  هو العنصر الأكبر في  $\mathcal{D}(a, b)$

$$\mathcal{D}(a, b) = r_n$$

### نتيجة

(1) إذا كان  $b$  لا يقسم  $a$  فإن القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$  هو آخر

باقي غير معدوم نتحصل عليه في خوارزمية إقليدس

(2) مجموعة القواسم المشتركة لعددين طبيعيين موجبين  $a$  و  $b$  هي

مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما ونكتب:

$$\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(\text{PGCD}(a, b))$$

مثال -

$$(1) \quad a = 108, b = 24$$

$$\text{ومنه } \text{PGCD}(108, 24) = 12$$

الناتج	4	2
108	24	12
الباقى	12	0

الناتج	1	7	2
187	165	22	11
البواقي	22	11	0

$$(2) \quad a = 187, b = 165$$

$$\text{ومنه } \text{PGCD}(187, 165) = 11$$

### تمرين تدريبي 1

$a$  و  $b$  عدنان طبيعيان بحيث  $a = 600$  و  $\text{PGCD}(a, b) = 12$

و  $260 < b < 300$ . أوجد قيمة  $b$

✓ الحل

12 يقسم  $b$  و  $b = 12q$  مع  $q$  عدد طبيعي غير معدوم

$$260 < b < 300 \text{ يكافئ } 260 < 12q < 300$$

ومنه ينتج  $25 < q < 26,66$

بما أن  $q$  عدد طبيعي فإن  $q \in \{22, 23, 24\}$

- إذا كان  $q = 22$  فإن  $b = 264$  وفي هذه الحالة  $\text{PGCD}(a, b) = 3$

إذن  $q = 22$  مرفوضة

- إذا كان  $q = 23$  فإن  $b = 276$  وفي هذه الحالة  $\text{PGCD}(a, b) = 12$

إذن  $q = 23$  مقبولة.

- إذا كان  $q = 24$  فإن  $b = 288$  وفي هذه الحالة  $\text{PGCD}(a, b) = 24$

إذن  $q = 24$  مرفوضة.

إذن توجد قيمة وحيدة لـ  $b$  هي 276.

### تمرين تدريبي 2

إذا قسمنا 4294 و 3521 على نفس العدد الطبيعي الموجب  $b$  نتحصل على

الباقين 10 و 11 على الترتيب. عين قيمة  $b$ .

✓ الحل

$$\text{معطيات التمرين تترجم } \rightarrow \begin{cases} 4294 = bq + 10 \\ 3521 = bq' + 11 \end{cases} \quad (I) \dots\dots$$

$$\text{الجملة (I) تصبح } \begin{cases} 4284 = bq \\ 3510 = bq' \end{cases}$$

إذن  $b$  يقسم 4284 ويقسم 3510 وبالتالي يقسم  $\text{PGCD}(4284, 3510)$

لكن  $\text{PGCD}(4284, 3510) = 18$  وعليه  $b$  ينتمي إلى  $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

وبما أن  $11 < b$  فإن قيمة  $b = 18$



## 2. مبرهنة بيزو

## تعريف

نقول عن عددين طبيعيين أنهما أوليان فيما بينهما عندما يكون القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1

## ملاحظة

نستطيع تمديد هذا التعريف إلى مجموعة الأعداد الصحيحة.

## مثال -

5 و 3 أوليان فيما بينهما لأن  $PGCD(3, 5) = 1$

## مثال -

11 و 7 أوليان فيما بينهما لأن  $PGCD(11, 7) = 1$

## مبرهنة

$a$  و  $b$  عددين طبيعيين غير معدومين  
القول أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما يكافئ القول أنه يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث  $au + bv = 1$

## الإثبات

- نفرض أنه يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث  $au + bv = 1$   
ونبرهن أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.  
القاسم المشترك الأكبر  $d$  للعددين  $a$  و  $b$  يقسم  $au + bv$   
وبما أن  $au + bv = 1$  فإن  $d$  يقسم 1 وبالتالي  $d = 1$   
إذن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

- نفرض أن العددين  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما ونبين أن  $au + bv = 1$   
لنعتبر  $E$  مجموعة كل الأعداد  $au + bv$  مع  $u$  و  $v$  عدنان صحيحان.  
المجموعة  $E$  تشمل  $a$  لأن  $a = 1 \times a + 0 \times b$   
إذن  $E$  تشمل أعداد صحيحة موجبة تماما.

ومن بين هذه الأعداد يوجد عدد أصغر من جميع الأعداد الأخرى نرمز له بـ  $au_1 + bv_1$   
ونضع  $m = au_1 + bv_1$ .

نبرهن أن  $m$  يقسم  $a$  و  $b$  ونستنتج أن  $m = 1$ .

قسمة  $a$  على  $m$  مع  $m = au_1 + bv_1$  تعطي  $a = (au_1 + bv_1)q + r$   
ومنه  $r = a(1 - qu_1) + b(-qv_1) = au + bv$

حيث  $u$  و  $v$  من  $\mathbb{Z}$

إذن  $r$  عنصر من  $E$  و  $r \geq 0$  و  $m > r$ .

لكن  $m$  هو أصغر عنصر في  $E$  موجب تماما إذن  $0 < r < m$  وهذا تناقض.

إذن  $r = 0$  و  $m$  يقسم  $a$

بنفس الطريقة نبين أن  $m$  يقسم  $b$

وبالتالي  $m$  يقسم  $a$  و  $b$  وعليه  $m$  يقسم  $PGCD(a, b)$

أي أن  $m$  يقسم 1 إذن  $m = 1$

## ملاحظة

لا يمكن استنتاج من المساواة  $au + bv = c$  مع  $c \neq 1$  أن  $a$  و  $b$  ليسا أوليان فيما بينهما.

مثلا  $a = 5$  و  $b = 2$

لدينا  $5 \times 3 + 2 \times (-4) = 7$  لكن 5 و 2 أوليان فيما بينهما.

## مثال -

اثبت باستعمال نظرية بيزو أن 35 و 16 أوليان فيما بينهما.

## الحل

نضع  $a = 35$  و  $b = 16$

لكي نثبت أن  $PGCD(35, 16) = 1$  لابد من إيجاد عددين صحيحين  $u$  و  $v$

بحيث  $35u + 16v = 1$  ومن أجل ذلك نستعمل القسمة الإقليدية لـ 35 و 16

ونكتب في كل مرة الباقي على الشكل  $au + bv$

$3 = a - 2b$  و  $1 = b - 5(a - 2b)$  أي  $1 = 11b - 5a$

إذن يوجد  $(u, v) = (-5, 11)$  بحيث  $au + bv = 1$

وعليه فإن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

## تمرين تدريبي 1

(1) عند طبيعى. بين أن العددين  $a = 3n + 1$  و  $b = 2n + 1$  أوليان فيما بينهما

(2) بين أنه إذا كان  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما  $a + b$  أولي مع  $a$  و  $b$

## الحل

لكي نبرهن أن عددين أوليين فيما بينهما نستعمل نظرية بيزو أو نفرض أن  $d$  قاسم مشترك

لـ  $a$  و  $b$  ثم نبين أن  $d = 1$

نبحث عن  $u$  و  $v$  من  $\mathbb{Z}$  بحيث  $au + bv = 1$

الفكرة للتخلص من  $n$  هي اختيار  $u = -2$  و  $v = 3$

وبالتالي نجد  $-2a + 3b = 1$

إذن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.



(2) - الطريقة الأولى :

بما أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما فإننا نستطيع كتابة  $au + bv = 1$  مع  $u$  و  $v$  عددين صحيحين .  
 المساواة  $au + bv = 1$  تكافئ  $au + bu - bu + bv = 1$  وهذه الأخيرة تكافئ  
 $(a+b)u + b(v-u) = 1$

وهذا ما يبين أن  $a+b$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.  
 نبين بنفس الطريقة أن  $a+b$  و  $a$  أوليان فيما بينهما

- الطريقة الثانية :

نفرض أن  $d$  يقسم  $a+b$  و  $b$  وبالتالي  $d$  يقسم  $(a+b) - b$  أي يقسم  $a$   
 إذن  $d$  يقسم  $a$  و  $b$  وبالتالي يقسم  $PGCD(a, b)$  أي  $d$  يقسم 1  
 وعليه فالعددان  $a+b$  و  $b$  أوليان فيما بينهما  
 بنفس الطريقة نبين أن  $a+b$  و  $a$  أوليان فيما بينهما.

تمرين تدريبي 2

- (1) بين أنه إذا كان عدد طبيعي  $a$  أولي مع عددين طبيعيين  $b$  و  $c$  فإنه أولي مع جنائهما.
- (2) استنتج أنه إذا كان  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما فإن  $a^n$  و  $b^n$  أوليان فيما بينهما من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $p \geq 1$ .

✓ الحل

- (1) بما أن  $a$  أولي مع كلا العددين الطبيعيين  $b$  و  $c$  فإن وحسب نظرية بيزو توجد أعداد صحيحة  $u$  و  $v$  و  $u'$  و  $v'$  بحيث  $au + bv = 1$  و  $au' + bv' = 1$ .  
 بضرب طرفي هاتين المساوتين نتحصل على :  
 $a(auu' + cuv' + buv') + (bc)(vv') = 1$   
 التي هي من الشكل  $ax + (bc)y = 1$  مع  $x$  و  $y$  صحيحان.  
 إذن حسب نظرية بيزو  $a$  و  $bc$  أوليان فيما بينهما .  
 وحسب السؤال (1) من أجل  $c = b$  نتحصل على  $a$  أولي مع  $b^2$   
 إذن  $a$  أولي مع  $b$  و  $b^2$  أي أولي مع  $b^3$   
 وهكذا نبرهن بالتراجع على أن  $a$  أولي مع  $b^n$  مع  $n \geq 1$   
 - بما أن  $b^n$  أولي مع  $a$  فهو أولي مع  $a^2$   
 إذن  $b^n$  أولي مع  $a$  و  $a^2$  وبالتالي فهو أولي مع  $a^3$   
 نبرهن بالتراجع على أن  $a$  أولي مع  $b^n$  أي  $a^n$ .

(3) - خواص القاسم المشترك الأكبر

مرهنة

$a, b, g$  ثلاث أعداد طبيعية موجبة تماما.

القضايا الثلاث التالية متكافئة .

- (1)  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$
- (2)  $g$  هو قاسم لـ  $a$  و  $b$  والحاصلين  $a'$  و  $b'$  بحيث  $a = ga'$  و  $b = gb'$  أوليان فيما بينهما.
- (3)  $g$  هو قاسم لـ  $a$  و  $b$  ويوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث  $au + bv = g$

الإثبات

(1) لنبين أن القضية (1) تستلزم القضية (2) :

نفرض أن  $g$  هو  $PGCD(a, b)$  ونبين أن الحاصلين  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما.  
 إذا كان  $d$  قاسما مشتركا لـ  $a'$  و  $b'$  فإن  $a' = dp$  و  $b' = dq$  مع  $p$  و  $q$  طبيعيين  
 وعليه  $a = dgq$  و  $b = dgq$

إذن  $dg$  قاسم مشترك لـ  $a$  و  $b$

لكن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$

وبالتالي يكون  $d = 1$  وعليه  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما.

(2) لنبين أن القضية (2) تستلزم القضية (3) :

نفرض أن  $g$  هو القاسم لـ  $a$  و  $b$  وأن الحاصلين  $a' = \frac{a}{g}$  و  $b' = \frac{b}{g}$  أوليان فيما بينهما.

إذن حسب نظرية بيزو يوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث :

$$\frac{a}{g}u + \frac{b}{g}v = 1$$

وبالضرب الطرفين في  $g$  نجد  $au + bv = g$

(3) لنبين أن القضية (3) تستلزم القضية (1) :

نفرض أن  $g$  قاسم لـ  $a$  و  $b$  ويوجد عدنان صحيحان  $u$  و  $v$

بحيث  $au + bv = g$

ليكن  $g'$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$

بما أن  $g$  يقسم  $a$  و  $b$  فإنه يقسم  $g'$  لكن  $g'$  يقسم  $a$  و  $b$

إذن  $g'$  يقسم  $au + bv$  وبالتالي يقسم  $g$  وعليه  $g' = g$

نتيجة

إذا كان  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$  فإنه مهما يكن العدد الطبيعي  $c$  يكون لدينا  $gc$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $ac$  و  $bc$  و نكتب  $PGCD(ac, bc) = c PGCD(a, b) = cg$



الإثبات

بما أن  $g$  يقسم  $a$  و  $b$  إذن  $g$  يقسم  $ac$  و  $bc$  للبرهان على أن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $ac$  و  $bc$  يكفي أن نبرهن أن  $g$  يمكن كتابته على الشكل  $g = acu + bcv$  لدينا  $g = au + bv$  وبالضرب في  $c$  نجد  $gc = acu + bcv$  إذن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $ac$  و  $bc$  .  
- وبنفس الطريقة نبرهن أنه إذا كان  $c$  يقسم  $a$  و  $b$  وبالتالي  $g$  فإن  $\frac{g}{c}$  هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $\frac{a}{c}$  و  $\frac{b}{c}$ .

تمرين تدريبي 1

- أوجد عددين طبيعيين  $a$  و  $b$  بحيث  $a+b=114$  و  $PGCD(a,b)=8$ .

الحل

بما أن  $PGCD(a,b)=8$  فإن  $a=8a'$  و  $b=8b'$  و  $PGCD(a',b')=1$  نعوض  $a$  و  $b$  في المساواة  $a+b=114$  نجد  $a'+b'=18$  إذن  $PGCD(a',b')=1$  و  $a'+b'=18$  الثنائيات  $(a',b')$  كما هي مبينة في الجدول التالي:

$a'$	1	5	7	13	17	11
$b'$	17	13	11	5	1	7

إذن  $(a,b) \in \{(8,136), (40,104), (56,88), (136,8), (104,40), (88,56)\}$

تمرين تدريبي 2

$n$  عدد طبيعي غير معيّن. نعتبر العددين  $a$  و  $b$  بحيث  $a = 2n^2$  و  $b = n(2n+1)$  بين أن  $2n$  و  $2n+1$  أوليان فيما بينهما، واستنتج أن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $a$  و  $b$ .

الحل

بما أن يوجد عددين صحيحان  $(u,v) = (-1,1)$  بحيث  $(-1)(2n) + (1)(2n+1) = 1$  فإن حسب نظرية بيزو  $2n$  و  $2n+1$  أوليان فيما بينهما.

- بما أن  $a=2n(n)$  و  $b=(2n+1)n$  و  $PGCD(2n+1,2n)=1$  فإن  $n$  هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $a$  و  $b$ .

تمرين تدريبي 3

$g$  هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $a$  و  $b$  و  $c$  عدد طبيعي أولي مع  $b$  بين أن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر للعديدين  $ac$  و  $bc$ .

الحل

$g$  يقسم  $a$  و  $b$  إذن يقسم  $ac$  و  $bc$  بما أن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$  فإنه يوجد عددين صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث:  
(1)  $au + bv = g$   
وبما أن  $b$  و  $c$  أوليان فيما بينهما فإنه يوجد  $u'$  و  $v'$  بحيث:  
(2)  $bu' + cv' = 1$   
بضرب طرفي الساتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد:  
 $(ac)(u'v') + b(auu' + bvv' + cvv') = g$   
وهذا يعني أن  $g$  هو القاسم المشترك الأكبر لـ  $ac$  و  $bc$ .

4. تطبيقات القواسم

1.4 مبرهنة غوص

إذا كانت  $a, b, c$  أعداد طبيعية موجبة تماماً بحيث  $a$  يقسم  $bc$  و  $a$  أولي مع  $b$  فإن  $a$  يقسم  $c$ .

الإثبات

- بما أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما فإنه يوجد عددين صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث:  
 $au + bv = 1$   
وبالضرب طرفي المساواة الأخيرة فنجد  $acu + bcv = c$   
بما أن  $a$  يقسم  $acu$  و  $bcv$  فرضاً فإنه يقسم  $bcv$  إذن  $a$  يقسم المجموع  $acu + bcv$  أي يقسم  $c$ .

نتيجة

إذا كان عدد طبيعي  $n$  يقبل القسمة على عددين أوليين فيما بينهما  $a$  و  $b$  فإنه يقبل القسمة على جداءهما.



### الإثبات

من الفرضية نستطيع كتابة  $n = ap$  و  $n = bq$  مع  $p$  و  $q$  طبيعيان .

إذن ينتج  $ap = bq$

وبما أن  $b$  يقسم  $ap$  و  $b$  أولي مع  $a$  فإنه يقسم  $p$  إذن  $p = bp'$  مع  $p'$  عدد طبيعي

وعليه  $n = abp'$  وهنا يعني أن  $n$  يقبل القسمة على  $ab$

- بصفة عامة إذا كان  $n$  يقبل القسمة على الأعداد الأولية فيما بينها مثنى مثنى

$a_1, a_2, \dots, a_n$  فإنه يقبل القسمة على الجداء  $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$

### مثال -

كل عدد يقبل القسمة على 2 و 5 فإنه يقبل القسمة على 10

لأن 2 و 5 أوليان فيما بينهما.

### تمرين تدريبي

$a, b, c, d$  أربع أعداد بحيث  $a$  صحيح سالب والآخرى طبيعية موجبة تماما .

ومشكلة بهذا الترتيب متتالية حسابية أساسها أولي مع  $b$  .

أوجد هذه الأعداد علما أن  $15b^2 = d - a$

### الحل

بما أن  $a, b, c, d$  بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية أساسها  $r$  أولي مع  $b$

فإن  $b = a + r$  و  $c = a + 2r$  و  $d = a + 3r$

عندئذ فالسواء  $15b^2 = d - a = 3r$  تصبح  $15b^2 = a + 3r - a = 3r$

بالقسمة على 3 نجد  $5b^2 = r$  ..... (I)

بما أن  $r$  أولي مع  $b$  فهو أولي مع  $b^2$  .

بما أن  $r$  يقسم  $5b^2$  و  $r$  أولي مع  $b^2$  فإن  $r$  يقسم 5 (حسب غوص).

إذن  $r$  ينتمي إلى المجموعة  $\{1, 5\}$

لكن  $r \geq 5$  إذن  $r = 5$  مرفوض وبالتالي الأساس هو 5.

نعوض قيمة  $r$  في (I) نجد  $b^2 = 1$  ومنه  $b = 1$

إذن  $a = b - r = -4$  و  $c = b + r = 6$  و  $d = c + r = 11$

### 2.4 الكسور غير القابلة للاختزال

نسمي كسرا كل عدد  $\frac{a}{b}$  مع  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان و  $b \neq 0$

(لا نأخذ بعين الاعتبار إلا الكسور الموجبة)

### تعريف

إذا كان  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما فنقول عن الكسر  $\frac{a}{b}$  أنه غير قابل للاختزال.

### مبرهنة

كل كسر يساوي كسرا غير قابل للاختزال.

### الإنبات

نعتبر كسرا  $\frac{c}{d}$  ، وليكن  $g$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $c$  و  $d$

عندئذ  $c = g c'$  و  $d = g d'$  مع  $c'$  و  $d'$  أوليان فيما بينهما.

إذن وبالقسمة على  $g$  نتحصل على  $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$  و  $\frac{c'}{d'}$  كسر غير قابل للاختزال

لأن  $c'$  و  $d'$  أوليان فيما بينهما.

### ملاحظة

إذا كان  $\frac{a}{d} = \frac{a'}{b}$  مع  $\frac{a}{b}$  كسر غير قابل للاختزال فإنه يوجد عدد صحيح موجب

$k$  بحيث  $c = ka$  و  $d = kb$  و بحيث  $k$  القاسم المشترك الأكبر للعدد  $b$  و  $c$  و

### تمرين تدريبي

$a = n(n+1)(n+5)$  عدنان طبيعيان حيث

بين أن  $a$  يقبل القسمة على 6

### الحل

لكي نبين أن  $a$  يقبل القسمة على 6 يكفي أن نبين أنه يقبل القسمة على 2 وعلى 3

لأن 2 و 3 أوليان فيما بينهما.

- نثبت أولا أن 3 يقسم  $a$  :

في الجدول المقابل تبين باقي قسمة  $a$  على 3.

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن العدد  $a$  يقبل القسمة على 3

باقي قسمة $a$ على 3	0	1	2
باقي قسمة $n + 1$ على 3	1	2	0
باقي قسمة $n + 5$ على 3	2	0	1
باقي قسمة $a$ على 3	0	0	0



- بما أن  $n(n+1)$  زوجي فإن  $(n+5)(n+1)$  زوجي  
ومنه نستنتج أن  $a$  يقبل القسمة على 2  
- يمكننا استعمال بواقي قسمة  $n$  على 6 للبرهان على أن  $a$  يقبل القسمة على 6.

## 5. المعادلة $ax + by = c$

$a, b, c$  ثلاثة أعداد صحيحة.  
المعادلة  $ax_0 + by_0 = c$  حيث  $x$  و  $y$  مجهولان من  $\mathbb{Z}$  تسمى معادلة ديوفنسيان.  
نرمز بـ  $g$  إلى القاسم المشترك لـ  $a$  و  $b$

### مبرهنة

الشرط اللازم والكافي لكي يكون للمعادلة  $ax + by = c$  ..... (E) حلا هو أن يكون القاسم المشترك للعديدين  $a$  و  $b$  يقسم  $c$ .

### الإثبات

- لنفرض وجود حل لـ (E) ونبين عندئذ أن  $g$  يقسم  $c$  :  
إذا كانت  $(x_0, y_0)$  حل لـ (E) فإن  $ax_0 + by_0 = c$  لكن  $g$  يقسم  $a$  و  $b$   
إذن يقسم  $ax_0 + by_0$  أي يقسم  $c$ .  
- نفرض أن  $g$  يقسم  $c$  ونبين أنه توجد حلول للمعادلة  $ax_0 + by_0 = c$   
 $g$  يقسم  $a$  و  $b$  و  $c$  إذن نستطيع كتابة  $a = g a', b = g b', c = g c'$   
مع  $a', b', c'$  أعداد طبيعية.  
بتعويض  $a, b, c$  في المعادلة  $ax + by = c$   
نجد  $g a' x + g b' y = g c'$  وبالقسمة على  $g$  نجد :  
 $a' x + b' y = c'$  ..... (1)

لكن  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما  
إذن يوجد عددين صحيحان  $u$  و  $v$  بحيث  $au + bv = 1$  (نظرية بيزو)  
ويضرب طرفي هذه الأخيرة في  $c'$  نجد  $auc' + bvc' = c'$   
مما يثبت أن الثنائية  $(x_0, y_0)$  بحيث  $x_0 = uc'$  و  $y_0 = vc'$   
حل للمعادلة  $ax + by = c'$

### نتيجة

إذا كانت  $(x_0, y_0)$  حل للمعادلة  $ax + by = c$  فإن مجموعة الحلول  
هي مجموعة لثنائيات  $(x, y)$  بحيث  $x - x_0 + k \frac{b}{g}$  و  $y - y_0 - k \frac{a}{g}$   
مع  $k$  عدد صحيح و  $a' = \frac{a}{g}$  و  $b' = \frac{b}{g}$

### الإثبات

- نفرض أن  $(x, y)$  حل فيكون لدينا  $ax + by = c$  ..... (1)  
بما أن  $(x_0, y_0)$  هي حل للمعادلة فإن  $ax_0 + by_0 = c$  ..... (2)  
بطرح (2) من (1) نجد  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$   
ومنه ينتج  $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$  ..... (3)  
بقسمة طرفي المساواة (3) على  $g$  نتحصل على  $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$  ..... (4)  
مع  $d'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما.  
وحسب نظرية غوص فإنه يوجد عدد صحيح  $k$  بحيث  $y_0 - y = k a'$   
ومنه  $y = y_0 - k a'$   
أي  $y = y_0 - k \frac{a}{g}$   
وبتعويض  $y$  في المعادلة (4) نجد  $x - x_0 = k b'$   
أي  $x = x_0 + k b' = x_0 + k \frac{b}{g}$   
وبالعكس إذا عوضنا قيمتي  $x$  و  $y$  في المعادلة  $ax + by = c$  سنجد أنها محققة من أجل  
كل عدد صحيح  $k$ .

### التفسير الهندسي لحلول المعادلة

في معلم متعامد ومتجانس للمستوي المعادلة  $ax + by = c$  هي معادلة مستقيمة  $d$ .  
حل المعادلة  $ax + by = c$  يؤول إلى البحث عن النقط من  $(d)$  بحيث تكون إحداثياتها  
صحيحة.

### تمرين تدريبي

نعتبر المعادلة (E) :  $13x + 19y = 4$  حيث  $x$  و  $y$  عددين صحيحان  
(1) عين ثنائية من الأعداد الصحيحة  $(u, v)$  بحيث  
 $13u + 19v = 1$  مستنتجا حلا خاصا  $(x_0, y_0)$  للمعادلة (E)  
(2) عين كل الثنائيات من الأعداد الصحيحة التي هي حلول المعادلة (E)

### الحل

(1) بما أن 13 و 19 أوليان فيما بينهما فإن حسب نظرية بيزو توجد ثنائية  $(u, v)$  من  
الأعداد الصحيحة بحيث  $13u + 19v = 1$   
لتعيين  $u$  و  $v$  ننجز القسمة الإقليدية المتتابعة لـ 19 على 13 ثم نعبر في كل مرة  
عن الباقي بدلالة  $13u + 19v$

2	1	الناجز
6	13	19
1	6	الباقي

$$6 = 19 - 1 \times 13$$

$$1 = 1 \times 13 - 2 \times 6$$

$$1 = 1 \times 13 - 2 \times (19 - 1 \times 13)$$



$$1 = 1 \times 13 - 2 \times 19 + 2 \times 13$$

$$1 = 3 \times 13 - 2 \times 19$$

$$(u, v) = (3, -2)$$

لدينا  $3 \times 13 - 2 \times 19 = 1$  وبضرب طرفي هذه المساواة في 4 نجد :

$$12 \times 13 - 8 \times 19 = 4$$

ومنه تكون  $(x_0, y_0) = (12, -8)$  حلا خاصا للمعادلة (E)

(2)  $(x, y)$  حلا للمعادلة (E) هذا معناه :

$$(1) \dots\dots\dots 13x + 19y = 4$$

$(x_0, y_0)$  حلا خاصا للمعادلة (E) هذا معناه :

$$(2) \dots\dots\dots 13x_0 + 19y_0 = 4$$

بطرح (2) من (1) نجد  $13(x - x_0) + 19(y - y_0) = 0$

$$(3) \dots\dots\dots 13(x - x_0) = 19(y_0 - y)$$

13 يقسم  $19(y_0 - y)$  و  $PGCD(13, 19) = 1$  حسب نظرية غوص فإن 13 يقسم

$$y_0 - y$$

13 يقسم  $y_0 - y$  هذا معناه أن  $y_0 - y = 13k$  مع  $k$  عدد صحيح

$$y = y_0 - 13k$$

نعوض  $y$  في (3) نجد  $(x - x_0) = 19k$  أي  $x = x_0 + 19k$

بالتالي الثنائيات  $(12 + 19k, -8 - 13k)$  هي حلول للمعادلة (E).

## 6. المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

$a$  و  $b$  عدنان صحيحان موجبان تماما لهما على الأقل مضاعف مشترك موجب تماما والذي

هو الجداء  $ab$ .

إذن مجموعة المضاعفات المشتركة لـ  $a$  و  $b$  غير خالية. ويوجد من بينها عنصرا موجبا

تماما وأصغر من كل العناصر الأخرى والذي نسميه بالمضاعف المشترك الأصغر

وترمز له بـ  $PPCM$

مبرهنة

إذا كان  $a$  و  $b$  عدنان صحيحان موجبين تماما و  $g$  قاسمهما المشترك الأكبر

و  $m$  مضاعفهما المشترك الأصغر فإن  $mg = ab$ .

وكل مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$  هو مضاعف لـ  $m$ .

الإثبات

ليكن  $g$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $a$  و  $b$  إذن  $a = ga'$  و  $b = gb'$

مع  $d$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما.

ليكن  $M$  مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$  وعليه  $M = ap$  و  $M = bq$

مع  $p$  و  $q$  عدنان طبيعيين.

إذن  $M = gdp = gb'q$  وبقسمة طرفي هذه المساواة على  $g$  نجد  $d'p = b'q$

بما أن  $d'$  يقسم  $b'q$  و  $d'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما فإنه وحسب نظرية غوص :

$d' = k$  أي  $q = kd'$ .

إذن  $M = b'a'k$  وبالتالي  $M = d'b'gk$  و  $M = \frac{ab}{g}k$

- وبالعكس نرهن أن كل عدد يكتب على  $M = d'b'gk$  مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$

$M = k(gd')b' = kb'd'$  وب نفس الطريقة نكتب  $M = k(gb')d' = kbd'$

ومنه نستنتج أن  $M$  مضاعف لـ  $a$  و  $b$

وبالتالي فهو مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$

وعليه كل المضاعفات المشتركة لـ  $a$  و  $b$  هي مضاعفات للعدد  $gd'b'$

وأصغرهم إذن هو  $gd'b'$

إذن  $m = gd'b'$  وعليه  $mg = ab$

خاصية

$a, b, m$  ثلاثة أعداد طبيعية

- القول أن  $m$  هو المضاعف المشترك الأصغر لـ  $a$  و  $b$  يكافئ القول أن  $m$  هو مضاعف لـ  $a$  و  $b$

بحيث أن حاصلتي قسمة  $m$  على  $a, b$  أوليان فيما بينهما.

الإثبات

ليكن  $m$  المضاعف المشترك الأصغر لـ  $a$  و  $b$  لدينا عنده  $m = gda' = ab'$

حاصلتي القسمة على الترتيب لـ  $m$  على  $a$  و  $b$  هما  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما.

- وبالعكس ليكن  $M$  مضاعف مشترك لـ  $a$  و  $b$  بحيث أن العددين الطبيعيين  $\frac{M}{a}$  و  $\frac{M}{b}$

أوليان فيما بينهما.

حسب المبرهنة السابقة يكون  $M$  مضاعفا لـ  $m$  إذن يوجد عدد طبيعي  $k$

بحيث  $M = km = kgda'$

إذن حاصلتي قسمة  $M$  على  $a$  و  $b$  هي على التوالي  $ka'$  و  $kb'$

لكن هذان الحاصلان فرضا أوليان فيما بينهما.

إذن  $k = 1$  وعليه  $M = gda'$  والذي يمثل المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $a$  و  $b$

ملاحظة

إذا كان  $m$  المضاعف المشترك الأصغر للعددين الطبيعيين الموجبين تماما  $a$  و  $b$  فإنه من أجل كل عدد طبيعي  $e$  غير معلوم يكون  $me$  هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين  $ae$  و  $be$



### تمرين تدريبي 1

أوجد كل الأعداد الطبيعية  $a$  و  $b$  بحيث يكون الفرق بين مضاعفيهما المشترك الأصغر وقاسمهما المشترك الأكبر هو 6.

✓ الحل

نسمي  $a$  و  $b$  هذين العددين حيث  $m$  المضاعف المشترك الأصغر لهما و  $g$  القاسم المشترك الأكبر لهما عندئذ  $m - g = 6$  و  $a = g a'$  و  $b = g b'$  مع  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما و  $m = g a' b'$  بتعويض عبارة  $m$  في المساواة  $m - g = 6$  نجد  $g a' b' - g = 6$  ومنه  $g(a' b' - 1) = 6$  ومنه نستنتج أن  $g$  يقسم 6 إذن  $g$  ينتمي إلى  $\{1, 2, 3, 6\}$

$g$	1	2	3	6
$a' b' - 1$	6	3	2	1
$a' b'$	7	4	3	2
$a'$	1	1	1	1
$b'$	7	4	3	2
$a$	1	2	3	6
$b$	7	8	9	12

ومنه فإن مجموعة الثنائيات  $(a, b)$  تنتمي إلى المجموعة  $\{(1, 7), (2, 8), (3, 9), (6, 12)\}$

### تمرين تدريبي 2

أوجد الأعداد الطبيعية  $a$  و  $b$  و  $a < b$  و  $PGCD(a, b) = 15$  و  $PPCM(a, b) = 105$

✓ الحل

بما أن  $PGCD(a, b) = 15$  فإن  $a = 15 a'$  و  $b = 15 b'$  حيث  $a'$  و  $b'$  أوليان فيما بينهما

وبما أن  $PPCM(a, b) = 105$  فإن  $15 a' b' = 105$  أي  $a' b' = 7$  وعليه نستنتج أن  $a' = 1$  و  $b' = 7$  لأن  $a' < b'$  إذن  $(a, b) = (15, 105)$

### 7. مجموعة الأعداد الأولية

تعريف

العدد الأولي هو عدد طبيعي أكبر تماما من الواحد و يقبل قاسمين الواحد ونفسه.

ملاحظة

- $\mathcal{P}(p) = \{1, p\}$  حيث  $p$  عدد أولي.
- العدد 1 ليس أوليا.
- كل عدد طبيعي غير أولي له على الأقل قاسما يختلف عن 1 ونفسه.

مبرهنة

- كل عدد طبيعي  $a \geq 2$  يقبل عددا أوليا كقاسم له.
- توجد ما لا نهاية من الأعداد الأولية.

### تمرين تدريبي 1

برهن أن كل عدد أولي  $p$  بحيث  $2 < p$  هو من الشكل  $4n + 1$  أو  $4n + 3$

✓ الحل

ليكن  $r$  باقي قسمة  $p$  على 4  
إذن  $p = 4n + r$  مع  $0 \leq r < 4$   
بما أن  $p$  أولي فإن  $r \neq 0$  و  $r \neq 2$  لأن:  
لو كان  $r = 0$  أو  $r = 2$  فإن  $p$  يقبل القسمة على 4 أو على 2  
إذن  $p = 4n + 1$  أو  $p = 4n + 3$

### تمرين تدريبي 2

$a$  و  $b$  و  $x \cdot a + y \cdot b$  أعداد طبيعية موجبة تماما بحيث  $x \cdot a + y \cdot b$  عدد أولي  
بين أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

✓ الحل

نضع  $x a + y b = p$  لنبرهن بالخلف



إذا كان  $a$  و  $b$  ليسا أوليين فيما بينهما فإن لهما على الأقل قاسم أولي مشترك  $d$ .  
لكن  $d$  يقسم  $a$  و  $b$   
إذن فهو يقسم  $xa + yb$  أي يقسم  $p$ .  
لكن  $p$  أولي إذن  $d = p$  ومنه نستنتج أن  $a$  و  $b$  هما أوليان  
إذن  $a$  و  $b$  أوليين فيما بينهما.

## 8. تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية

مبرهنة 1

كل عدد طبيعي  $n \geq 2$  أولي أو يساوي جداء أعداد أولية.

تعريف

تحليل عدد طبيعي  $n$  إلى جداء عوامل أولية هو كتابته على الشكل النموذجي  
 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$   
مع  $p_1 < p_2 < \dots < p_r$  و  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  أعداد طبيعية وهذا التحليل وحيد  
عند قواسم  $n$  هي  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ .

مبرهنة 2

$n$  عند طبيعي غير أولي، تحليله إلى جداء عوامل أولية هو  $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$   
وعندئذ فإن قواسمه هي كل الأعداد التي تكتب على الشكل  $p_1^{\alpha'_1} p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_r^{\alpha'_r}$   
مع  $0 \leq \alpha'_i \leq \alpha_i$

تمرين تدريبي

عين  $PGCD$  و  $PPCM$  للعددين  $a = 270$  و  $b = 84$

الحل

لدينا  $a = 2 \times 3^3 \times 5$  و  $b = 2^2 \times 3 \times 7$   
 $PPCM(a, b)$  هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة في تحليل  
العددين وبحيث يأخذ كل عامل بأس أكبر.  
ومنه  $PPCM(a, b) = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 7560$   
 $PGCD(a, b)$  هو جداء كل العوامل الأولية المشتركة في تحليل العددين وبأس أصغر  
ومنه  $PGCD(a, b) = 2 \times 3 = 6$

## 9. الأعداد الأولية وقابلية القسمة في $\mathbb{N}$

### 1.9 قابلية القسمة على عدد أولي

مبرهنة 1

$p$  عدد أولي و  $a$  عدد طبيعي غير قابل للقسمة على  $p$  فيكون عندئذ  $p$  و  $a$  أوليين فيما بينهما.

مبرهنة 2

- $p$  عدد أولي يقسم الجداء  $ab$  عندئذ  $p$  يقسم  $a$  أو يقسم  $b$
- $p$  عدد أولي يقسم الجداء  $ab$  حيث أن  $a$  و  $b$  أوليان عندئذ  $a = p$  أو  $b = p$

### 2.9 نظرية فيرما "fermat"

$p$  عدد أولي و  $a$  عدد طبيعي غير قابل للقسمة على  $p$  عندئذ  $(a^{p-1} - 1)$  قابل للقسمة على  $p$   
وبصيغة أخرى  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$  وبصفة عامة  $a^p \equiv a [p]$

تمرين تدريبي

$p$  عدد أولي يختلف عن 3، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  يكون  
 $a_n = 3^{n+p} - 3^{n-1}$  قابلاً للقسمة على  $p$

الحل

$a_n = 3^n (3^p - 3)$   
بما أن  $p$  أولي و 3 لا يقبل القسمة على  $p$   
إذن نستطيع تطبيق مبرهنة فيرما.  
 $3^p - 3 = 0 [p]$  ومنه  $3^p = 3 [p]$   
إذن  $3^n (3^p - 3) = 0 [p]$  أي  $a_n = 0 [p]$



# تطبيقاً



## تطبيق 1

المهمة تعيين PGCD حسب قيم  $n$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  موجب تماماً نعتبر العددين :  
 $a = 5n + 1$  و  $b = 2n + 1$  وليكن  $g$  قاسمهما المشترك الأكبر.  
 1- بين أن القيم الممكنة لـ  $g$  هي 1 و 3.  
 2- باستعمال جدول عین حسب بواقي قسمة  $n$  على 7 البواقي الممكنة لقسمة  $2n + 1$  على 3.  
 ب) استنتج أنه من أجل أي قيمة لـ  $n$  فإن العدد  $b$  يقبل القسمة على 3.  
 ج) تحقق من أجل قيم  $n$  الموجودة في السؤال ب) أن  $a$  يقبل القسمة على 3.  
 ما هي قيمة  $g$  عنئذ؟

## الحل

1) لدينا من الفرض  $g = PGCD(a, b)$   
 بما أن  $g$  يقسم  $a$  و  $b$  فإن  $g$  يقسم  $(5b - 2a)$  أي  $g$  يقسم 3  
 إذن القيم الممكنة لـ  $g$  هي 1 و 3

2) ا) بواقي قسمة  $2n + 1$  على 3 كما في الجدول الموالي :

بواقي قسمة $n$ على 3	0	1	2
بواقي قسمة $2n + 1$ على 3	1	0	2

إذن البواقي الممكنة في  $2n + 1$  على 3 هي 0، 1، 2.

ب) من الجدول السابق نستنتج أنه إذا كان  $n = 3k + 1$  مع  $k \in \mathbb{N}$

فإن  $b$  يقبل القسمة على 3.

ج) في حالة  $n = 3k + 1$  نجد  $a = 15k + 6$  أي  $a = 3(5k + 2)$

بوضع  $k' = 3k + 2$  يكون  $a = 3k'$

إذن  $a$  يقبل القسمة على 3.

بما أن  $a$  يقبل القسمة على 3 و  $b$  يقبل القسمة على 3 فإن :

$PGCD(a, b) \neq 1$  وبالتالي  $g = 3$

## تطبيق 2

المهمة استعمال نظرية بيزو لإثبات أن عددين أوليين فيما بينهما

$a$  و  $b$  عددين طبيعيين غير معلومين بحيث  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$   
 بين باستعمال نظرية بيزو أن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

## الحل

الطريقة الأولى :

من المساواة  $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$  ينتج  $a^2 + ab - b^2 = 1$  أو  $a^2 + ab - b^2 = -1$

- إذا كان  $a^2 + ab - b^2 = 1$  فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :

$$a \times a + b(a - b) = 1$$

ومنه يوجد عددين صحيحان  $u$  و  $v$

بحيث  $au + bv = 1$  مع  $(u, v) = (a, a - b)$

وهذا يعني أن  $PGCD(a, b) = 1$ .

- إذا كان  $a^2 + ab - b^2 = -1$  فإننا نستطيع أن نكتب هذه المساواة على الشكل :

$$(-a) \times a + b(a - b) = 1$$

ومنه يوجد عددين صحيحان  $u^*$  و  $v$

بحيث  $au + bv = 1$  مع  $(u, v) = (-a, b - a)$

و هذا يعني أن  $PGCD(a, b) = 1$ .

الطريقة الثانية :

نضع  $g = PGCD(a, b)$

إذا كان  $g$  يقسم  $a$  و  $b$  فإن  $g$  يقسم  $a^2$  و  $b^2$  و  $ab$

وبالتالي  $g$  يقسم  $a^2 + ab - b^2$

بما أن  $g$  يقسم  $a^2 + ab - b^2$  فإنه يقسم  $(a^2 + ab - b^2)^2$

أي  $g$  يقسم 1 وعليه  $g = 1$

إذن  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما.

## تطبيق 3

المهمة استعمال خوارزمية إقليدس لتعيين حل خاص لمعادلة

باستعمال القسمة الإقليدية عين ثنائية  $(x, y)$  الصحيحة بحيث :  
 $83x + 13y = 1$

## الحل

ننجز القسمة الإقليدية المتتالية و في كل مرة نكتب الباقي على الشكل  $au + bv$



الباقي	6	2	1	1
83	13	5	3	2
الباقي	5	3	2	1

$$1 = 3 - 2$$

$$1 = 3 - (5 - 3 \times 1) = 2 \times 3 - 1 \times 5$$

$$1 = 2 \times (13 - 5 \times 2) - 1 \times 5 = (-5)(5) + 2 \times 13$$

$$1 = (-5)(83 - 6 \times 13) + 2 \times 13 = (-5)(83) + 32(13)$$

ومن هنا نستنتج أن  $(u_0, v_0) = (-5, 32)$  حلاً خاصاً للمعادلة العطاء.

#### تطبيق 4

الهدف قابلية القسمة وتعيين PGCD

من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 5$  نعتبر العددين الطبيعيين  $a$  و  $b$  بحيث :

$$b = 2n^2 - 7n + 4 \text{ و } a = n^3 - n^2 - 12n$$

(1) بين أن  $a$  و  $b$  يقبلان القسمة على  $(n-4)$

(2) نضع  $\alpha = 2n+1$  و  $\beta = n+3$  وليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر لـ  $\alpha$  و  $\beta$

(أ) أوجد علاقة بين  $\alpha$  و  $\beta$  مستقلة عن  $n$

(ب) بين أن  $d$  قاسم لـ 5

(ج) بين أن العددين  $\alpha$  و  $\beta$  مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان  $(n-2)$  مضاعفاً لـ 5.

(3) بين أن  $(2n+1)$  و  $n$  أوليان فيما بينهما.

(4-1) عين حسب قيم  $n$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $a$  و  $b$ .

(ب) تحقق من النتائج المحصل عليها في حالة  $n = 11$  و  $n = 12$

✓ الحل

(1) من أجل  $n=4$  نجد  $a=0$  و  $b=0$

ومن هنا كل من  $a$  و  $b$  يقبلان القسمة على  $(n-4)$

وعليه نكتب :

$$a = n(n-4)(n+3) \text{ و } b = (n-4)(2n+1)$$

(2) لدينا  $\alpha = 2n+1$  و  $\beta = n+3$  و  $d = PGCD(\alpha, \beta)$

(أ) لايجاد علاقة مستقلة عن  $n$  تربط  $\alpha$  و  $\beta$  لابد من التخلص من  $n$

وبالتالي العلاقة التي تربط  $\alpha$  و  $\beta$  هي  $2\beta - \alpha = 5$

(ب) بما أن  $d$  يقسم  $\alpha$  و  $\beta$  فإنه يقسم  $2\beta - \alpha$  أي  $d$  يقسم 5

(ج) إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  مضاعفين للعدد 5 فإن  $\alpha - \beta$  مضاعف للعدد 5

أي  $(n-2)$  مضاعف للعدد 5

وبالعكس إذا كان  $(n-2)$  مضاعفاً للعدد 5

فإن  $n = 5k+2$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$

وبالتالي  $\alpha = 10k+5$  و  $\beta = 5k+5$

إذن يكون  $\alpha$  و  $\beta$  مضاعفين للعدد 5.

(3) بما أن  $1(2n+1) + (-2)n = 1$

فإنه وحسب نظرية بيزو  $2n+1$  و  $n$  أوليان فيما بينهما.

(4) (1)  $PGCD(a, b) = (n-4)PGCD(n(n+3), 2n+1)$

- إذا كان  $(n-2)$  ليس مضاعفاً للعدد 5

فإن  $(2n+1)$  أولي مع  $n+3$  وأولي مع  $n$

وبالتالي فهو أولي مع  $(n+3)$

وعليه  $PGCD(n(n+3), 2n+1) = 1$

إذن  $PGCD(a, b) = (n-4) \times 1 = n-4$

- حالة  $n-2$  مضاعف للعدد 5 :

نثبت أن  $PGCD(n(n+3), 2n+1) = d$

بما أن  $d$  يقسم  $2n+1$  و يقسم  $n+3$  فإنه يقسم  $n(n+3)$  و  $2n+1$

وبالتالي  $d$  يقسم  $PGCD(n(n+3), 2n+1)$ .....(1)

إذا كان  $\delta$  القاسم المشترك الأكبر للعددين  $2n+1$  و  $n(n+3)$

فإن  $\delta$  يقسم  $(n+3)$  و  $(\delta$  يقسم  $(2n+1)$ )

وبما أن  $n$  و  $2n+1$  أوليان فيما بينهما فإن  $\delta$  لا يقسم  $n$

وبالتالي يقسم  $n+3$

إذن  $\delta$  يقسم  $2n+1$  و يقسم  $n+3$

وبالتالي  $\delta$  يقسم  $PGCD((n+3), 2n+1)$  أي  $\delta$  يقسم  $d$ .....(2)

من (1) و (2) نجد  $\delta = d$

$$PGCD(a, b) = (n-4) \times d = 5(n-4) \text{ إذن}$$

(ب) في حالة  $n = 11$  يكون  $n-2$  ليس مضاعفاً للعدد 5

$$PGCD(a, b) = 11-4 = 7$$

في حالة  $n = 12$  يكون  $n-2$  مضاعفاً للعدد 5 وبالتالي

$$PGCD(a, b) = 5(12-4) = 40$$

#### تطبيق 5

الهدف PGCD ونظرية بيزو

$a, b, A, B$  أعداد طبيعية بحيث  $A = 9a + 2b$  و  $B = 7a + 5b$

(1) بين أنه إذا كان أحد العددين  $A$  و  $B$  يقبل القسمة على 31 فإن الآخر

يكون كذلك.



(2) بين أنه إذا كان  $a, b$  أوليين فيما بينهما فإن القواسم المشتركة للعديدين  $A$  و  $B$  هي 1 و 31.

✓ الحل

(1) لدينا :

$$(1) \dots\dots\dots 5A - 2B = 45a + 10b - 14a - 10b = 31a$$

$$(2) \dots\dots\dots 9B - 7A = 63a + 45b - 63a - 14b = 31b$$

إذا كان  $A$  يقبل القسمة على 31 أي  $A = 31q$

$$\text{فإن } 2B = 5 \times 31q - 31a$$

وبالتبسيط نجد  $2B = 31(5q - a)$

بما أن 31 يقسم  $2B$  و  $PGCD(2, 31) = 1$  فإنه وحسب غوص 31 يقسم  $B$ .

إذا كان  $B$  يقبل القسمة على 31 وباستعمال المساواة (2)

نستنتج أن  $A$  يقبل القسمة على 31

(2) ليكن  $\delta$  قاسم مشترك للعديدين  $A$  و  $B$

إذن  $\delta$  يقسم  $a$  و  $31a$  و يقسم  $31b$

وبالتالي يقسم  $PGCD(31a, 31b)$

أي يقسم  $31PGCD(a, b)$

لكن  $PGCD(a, b) = 1$

إذن  $\delta$  يقسم 31.

ومنه فإن القواسم المشتركة للعديدين  $A$  و  $B$  هي قواسم 31 وهي 1، 31

### تطبيقات نظرية غوص إقليدس

### تطبيق 6

$n$  و  $p$  عدنان طبيعيان غير معلومين.

(1) بين أن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 30.

(2) بين أن الكثافة العشرية لـ  $n^p$  و  $n^{p+4}$  تنتهي بنفس الرقم.

✓ الحل

(1) لكي يقبل العدد  $n(n^4 - 1)$  القسمة على 30 يجب أن يقبل القسمة على 6 و 5

إذن 6 و 5 أوليان فيما بينهما.

نبا أن  $n(n^4 - 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$  و  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 6

فإن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 6.

بواقى قسمة أي عدد طبيعي  $n$  على 5 هي 4، 3، 2، 1، 0

والجدول التالي يلخص البواقى الممكنة للعدد  $n(n^4 - 1)$  على 5

بواقى قسمة $n$ على 5	0	1	2	3	4
بواقى قسمة $n^4 - 1$ على 5	4	0	0	0	0
بواقى قسمة $n(n^4 - 1)$ على 5	0	0	0	0	0

ومن الجدول نستنتج أن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 5

إذن  $n(n^4 - 1)$  يقبل القسمة على 30

(2) لكي ينتهي العدنان  $n^p$  و  $n^{p+4}$  بنفس الرقم يجب أن يكون  $n^{p+4} - n^p = 0 [10]$

$$\text{لدينا } n^{p+4} - n^p = n^{p-4}(n^4 - 1)n$$

بما أن  $n(n^4 - 1) = 0 [30]$  فإن  $n(n^4 - 1) = 0 [10]$

وبالتالي  $n^{p-4}(n^4 - 1)n = 0 [10]$

### تطبيق 7 حل المعادلات من الشكل $ax + by = c$ في $\mathbb{Z}^2$

(1) باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد حلا خاصا  $\mathbb{Z}^2$  للمعادلة

$$-43x + 18y = 1$$

(2) استنتج من السؤال (1) حلا خاصا في  $\mathbb{Z}^2$  للمعادلة  $-43x + 18y = 3$

(3) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $-43x + 18y = 3$

✓ الحل

(1) ننجز القسمة الإقليدية لـ 43 على 18 وفي كل مرة نكتب البواقى على الشكل  $au + bv$

الباقى	1	2	2	1
43	3	4	7	18
البواقى	1	3	4	7

$$1 = 4 - 3 \times 1$$

$$1 = 4 - (7 - 1 \times 4) = 2 \times 4 - 1 \times 7$$

$$1 = 2(18 - 2 \times 7) - 1 \times 7 = (-5) \times 7 + 2 \times 18$$

$$1 = (-5)(43 - 2 \times 18) + 2 \times 18 = (-5)43 + 12 \times 18$$

ومنه نستنتج أن  $(x, y) = (5, 12)$  حل خاص للمعادلة  $-43x + 18y = 1$

(2) لدينا  $1 = (-5)(43) + 12 \times 18$  بضرب طرفي هذه المساواة في 3 نجد  $3 = (-15)(43) + 36 \times 18$

ومنه  $(x_0, y_0) = (15, 36)$  حل خاص للمعادلة  $-43x + 18y = 3$

$$(1) \dots\dots -43x + 18y = 3$$

$$(2) \dots\dots (-43)15 + 18 \times 36 = 3$$



ب طرح (2) من (1) طرفا لطرف نجد  $(-43)(x-15)+18(y-36)=0$   
 أي  $43(x-15)=18(y-36)$  ..... (3)  
 بما أن  $PGCD(18,43)=1$  و  $18(y-36)$  يقسم  $y-36$  وحسب نظرية غوص 43 يقسم  $y-36$   
 أي  $y-36=43k$  يعني يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث  $y-36=43k$  مع  $k \in \mathbb{N}$   
 نعوض قيمة  $y$  في (3) نجد  $x-15=18k$  ومنه  $x=18k+15$   
 إذن الحلول العامة للمعادلة المعطاة هي الثنائيات  $(x,y)$  بحيث  $(x,y)=(18k+15,43k+36)$  مع  $k \in \mathbb{N}$

### تطبيق 8

توظيف المعادلات لإيجاد زمن التماثل بين جسمين فضائيين

فلنكن لاحظ جسمين  $A$  و  $B$  في الفضاء الخارجي يظهران بشكل دوري، حيث يظهر الجسم  $A$  كل 105 أيام بينما يظهر الجسم  $B$  كل 81 يوما. في اليوم  $J_0$  ظهر للفلكي الجسم  $A$  ثم ظهر له الجسم  $B$  بعد ستة أيام. يريد الفلكي حساب (توقع) اليوم  $J_1$  الذي يظهر فيه الجسمان معا. (1) ليكن  $u$  و  $v$  عدد الدورات الكاملة في الفترة  $[J_0, J_1]$  للجسمين  $A$  و  $B$  على الترتيب. بين أن الثنائية  $(u,v)$  حل للمعادلة  $(E_1)$  حيث  $35x-27y=2$  ..... (2) عين ثنائية  $(x_0, y_0)$  من الأعداد الصحيحة النسبية بحيث تكون حلا للمعادلة  $35x-27y=1$  (ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة  $(E_1)$  (ج) عين كل الحلول  $(u,v)$  للمعادلة  $(E_1)$  (1-3) ما هو عدد أيام الفترة  $[J_0, J_1]$  ؟ (ب) إذا كان اليوم  $J_0$  هو يوم الثلاثاء 7 ديسمبر 1999 فما هو بالضبط تاريخ اليوم  $J_1$  علما أن السنة 2000 هي سنة كبيسة ؟ (ج) إذا تحدث على الفلكي الملاحظة في هذا الوعد فما هو عدد الأيام التي سينتظرها حتى يحدث الاقتران التالي للجسمين  $A$  و  $B$ .

الحل

- (1) كل دورة للجسم تمثل 105 يوما  
 إذن عدد أيام الفترة  $[J_0, J_1]$  هي  $105u$   
 وكل دورة للجسم  $B$  تمثل 81 يوما  
 إذن عدد أيام الفترة  $[J_0, J_1]$  هي  $81v$   
 إذن عدد أيام الفترة  $[J_0, J_1]$  هي  $105u$  ومن جهة أخرى  $81v+6$   
 وعليه تستنتج أن  $105u=81v+6$  أي  $105u=81v+6$

وبالقسمة على 3 نجد  $35u-27v=2$   
 (1) باستعمال خوارزمية إقليدس نجد  $(x_0, y_0) = (-10, -13)$   
 (ب) بما أن  $(x_0, y_0)$  حل خاص للمعادلة  $35x-27y=1$   
 فإن  $(2x_0, 2y_0)$  حل خاص للمعادلة  $(E_1)$   
 إذن  $(u_0, v_0) = (-20, -26)$   
 (ج) تعيين الحل العام للمعادلة  $(E_1)$   
 $(E_1)$  .....  $35x-27y=2$   
 $(E_1')$  .....  $35(-20)-27(-26)=2$   
 بطرح  $(E_1')$  من  $(E_1)$  طرفا لطرف نجد  $35(x+20)-27(y+26)=0$  ..... (2)  
 أي  $35(x+20)=27(y+26)$  ..... (3)  
 35 يقسم  $27(y+26)$  و 35 أولي مع 27  
 ومنه حسب غوص 35 يقسم  $y+26$   
 وعليه  $y+26=35k$  مع  $k \in \mathbb{Z}$   
 أي  $y=35k-26$

بتعويض  $y$  في  $(E_1')$  نجد  $x=27k-26$   
 إذن الحلول  $(u,v)$  تكون من الشكل  $u=27k-26$  و  $v=35k-26$  مع  $k \in \mathbb{N}^*$

- (1) (3) من أجل  $k=1$  أي أول اقتران نجد  $u=7$   
 ومنه طول الفترة  $[J_0, J_1]$  هي  $105 \times 7 + 1$  وهذا يساوي 736 يوما  
 (ب) لدينا  $J_1 - J_0 = 735 = 0[7]$  إذن اليوم  $J_1$  هو يوم الثلاثاء.  
 وبما أن  $735 = 365 + 4 + 366$  فإن تاريخ  $J_1$  هو سنتين وأربعة أيام بعد  $J_0$   
 أي  $J_1$  هو الثلاثاء 11 ديسمبر 2001.  
 (ج) حتى نجد عدد أيام الانتظار للاقتران الثاني نحل المعادلة  $105u=27v+0$   
 لأنه في هذه الحالة لا يوجد فرق في الأيام وبالتالي نحل المعادلة  $35u=27v$   
 ويعد حل هذه المعادلة نجد :  

$$\begin{cases} u=27k \\ v=35k \end{cases} \text{ مع } k \in \mathbb{N}^*$$
 من أجل  $k=1$  نجد  $u=27$  و  $v=35$   
 وبالتالي عدد أيام الانتظار هي  $81v=81 \times 35=105$  و  $u=105 \times 27=2835$

### تطبيق 9

تعيين نقاط من الفضاء إحداثياتها أعداد طبيعية

- (1) نعتبر المعادلة  $6x+7y=57$  (E) حيث  $x$  و  $y$  عدنان صحيحان  
 (أ) عين الثنائية من الأعداد الصحيحة  $(u,v)$  بحيث  $6u+7v=1$   
 ثم استنتج حلا خاصا  $(x_0, y_0)$  للمعادلة (E)  
 (ب) عين الثنائيات من الأعداد الصحيحة حلولاً للمعادلة (E)



(3)  $M$  تنتمي إلى  $(p)$  تعني أن  $6x + 7y + 8z = 57$

وتعني أيضا  $7y = 57 - 6x - 8z$

بما أن  $6x - 8z$  زوجي

فإن  $57 - 6x - 8z$  فردي

وبالتالي  $7y$  فردي وعليه  $y$  فردي.

(ب) نضع  $y = 2p + 1$  مع  $p$  عدد طبيعي.

العلاقة  $6x + 7y + 8z = 57$  تكتب عندئذ  $6x + 14p + 8z = 50$

لكن  $6x = 0[3]$  و  $14p = 2p[3]$  و  $8z = 2z[3]$  و  $50 = 2[3]$

إذن ينتج  $2p + 2z = 2[3]$

وبالقسمة على 2 نجد  $p + z = 1[3]$

(ج) نضع  $p + z = 3q + 1$  مع  $q \in \mathbb{N}$

من السؤال السابق  $p + z$  يكتب على الشكل  $3q + 1$

إذن المساواة  $6x + 14p + 8z = 50$  تكتب  $6x + 14p + 8(3q + 1 - p) = 50$

وبالتبسيط نجد  $x + p + 4q = 7$

وبما أن  $x$  و  $p$  و  $q$  أعداد طبيعية

فإن  $x \geq 0$  و  $p \geq 0$  و  $q \geq 0$

إذن  $4q \leq 7$  ومنه نستنتج  $q = 0$  أو  $q = 1$

(د) من السؤال السابق لدينا  $q = 0$  أو  $q = 1$

ولدينا أيضا  $x + p + 4q = 7$  ،  $p + z = 3q + 1$  ،  $y = 2p + 1$

- إذا كان  $q = 0$  فإن  $x + p = 7$  و  $p + z = 1$

وبالتالي  $p = 0$  أو  $p = 1$

لدينا إذن :

(  $q = 0$  و  $p = 0$  و  $x = 7$  و  $z = 1$  و  $y = 1$  )

أو (  $q = 0$  و  $p = 1$  و  $x = 6$  و  $z = 0$  و  $y = 3$  )

وعليه توجد نقطتان هما (7, 1, 1) و (6, 0, 3)

- إذا كان  $q = 1$  فإن  $x + p = 3$  و  $p + z = 4$  و  $y = 2p + 1$

والجدول التالي يلخص جميع الحالات الممكنة لـ  $x, y, z, p$  :

$x$	3	2	1	0
$p$	0	1	2	3
$z$	4	3	2	1
$y$	1	3	5	7
$(x, y, z)$	(0, 5, 2)	(2, 3, 3)	(1, 5, 2)	(0, 7, 1)

(2) ليكن  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء  
تعتبر المستوي  $(p)$  ذو المعادلة  $6x + 7y + 8z = 57$  ولنعبر النقطة من المستوي

$(p)$  التي تنتمي إلى المستوي  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

بين أنه توجد نقطة واحدة من هذه النقاط لها إحداثيات طبيعية.

(3) نعتبر نقطة  $M$  من المستوي  $(p)$  إحداثياتها  $(x, y, z)$

حيث  $x, y, z$  أعداد طبيعية.

(أ) بين أن  $y$  فردي.

(ب) نضع  $y = 2p + 1$  حيث  $p$  عدد طبيعي.

بين أن باقي القسمة الإقليدية للعدد  $p + z$  على 3 يساوي 1.

(ج) نضع  $p + z = 3q + 1$  حيث  $q$  عدد طبيعي

بين أن الأعداد الطبيعية  $q, p, x$  تحقق العلاقة  $x + p + 4q = 7$

ثم استنتج أن  $q$  يأخذ القيمتين 0 أو 1

(د) استنتج إحداثيات كل النقاط من  $(p)$  التي إحداثياتها أعداد طبيعية.

✓ الحل

(1) بما أن  $6x + 7y = 1$  فإن الثنائية  $(-1, 1)$  حل خاص للمعادلة  $6x + 7y = 1$

بضرب المساواة  $6x + 7y = 1$  في 57 نجد  $6x + 7y = 57$

ومنه نستنتج أن  $(-57, 57)$  حل خاص للمعادلة (E).

(ب) المعادلة  $6x + 7y = 57$  تكتب  $6x + 7y = 6(-57) + 7(57)$

ومنه ينتج  $6(x + 57) = 7(57 - y)$

بما أن 6 يقسم  $7(57 - y)$  و 6 و 7 أوليان فيما بينهما

فإن حسب نظرية غوص 6 يقسم  $57 - y$ .

إذن يوجد عدد صحيح  $k$  بحيث  $57 - y = 6k$  أي  $y = -6k + 57$

بتعويض عبارة  $y$  في (E) نجد  $x = 7k - 57$

وبالعكس كل الثنائيات  $(7k - 57, 57 - 6k)$  تحقق المعادلة (E)

إذن فهي حلول لـ (E)

إذن الثنائيات الصحيحة حلول للمعادلة (E) هي من الشكل  $(7k - 57, 57 - 6k)$  مع  $k \in \mathbb{Z}$

(2) لتكن  $M$  نقطة من  $(p)$  وتنتمي أيضا إلى المستوي  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$  إحداثياتها  $(x, y, z)$

تحقق المعادلتين  $6x + 7y + 8z = 57$  و  $z = 0$

إذن المسألة تؤوّل إلى إيجاد الحلول في  $\mathbb{Z}^2$  للمعادلة  $6x + 7y = 57$

وهذا يعني إيجاد العدد الصحيح  $k$  بحيث  $\begin{cases} 7k - 57 \geq 0 \\ 57 - 6k \geq 0 \end{cases} \dots (1)$

يعد حل الجملة (1) نجد  $k = 9$

إذن توجد نقطة وحيدة تحقق الشرطين إحداثياتها  $(6, 3, 0)$



إذن توجد 6 نقاط إحداثياتها أعداد طبيعية هي:

$$(1, 5, 2), (6, 0, 3), (7, 1, 1), (0, 7, 1), (1, 5, 2), (2, 3, 3)$$

### تطبيق 10

تعيين حلول معادلة  $x^2 + y^2 = p^2$  حيث  $p$  عدد طبيعي

$p$  عدد طبيعي معطى، نريد دراسة وجوه ثنائيات  $(x, y)$  من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً تحقق المعادلة (E)  $x^2 + y^2 = p^2$  .....  
1- نضع  $p=2$ . بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول.  
نفرض أن  $p \neq 2$  وأن  $(x, y)$  حل للمعادلة (E)  
2- بين أن  $x$  و  $y$  أحدهما زوجي والآخر فردي  
ب) بين أن  $x$  و  $y$  لا يقبلان القسمة على  $p$   
ج) استنتج أن  $x$  و  $y$  أوليان فيما بينهما  
3) نفرض الآن أن  $p$  هو مجموع مربعين غير معلومين أي  $p = u^2 + v^2$  حيث  $u$  و  $v$  عددان طبيعيين موجبين تماماً  
أ) تحقق أن الثنائيات  $(|u^2 - v^2|, 2uv)$  حل للمعادلة (E)  
ب) أعط حلًا للمعادلة (E) في حالة  $p=5$  ثم لـ  $p=13$   
4- بين أن المعادلة (E) ليس لها حلول في حالة  $p=3$  و  $p=7$   
ب) بين أن المعادلتين  $x^2 + y^2 = 9$  و  $x^2 + y^2 = 49$  لا تقبلان حلولاً من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً.

### الحل

1) في حالة  $p=2$  المعادلة (E) تكتب  $x^2 + y^2 = 4$

لكن  $x > 0$  و  $y > 0$

إذن  $x^2 < 4$  و  $y^2 < 4$  ومنه ينتج  $x < 2$  و  $y < 2$

وبالتالي الثنائية الوحيدة التي تحقق  $x < 2$  و  $y < 2$  هي  $(1, 1)$

ولكن  $(1, 1)$  لا تحقق المعادلة (E)

إذن (E) ليس لها حلولاً في حالة  $p=2$

2) نفرض أن  $(x, y)$  حل للمعادلة (E) في حالة  $p \neq 2$

إذن  $x^2 + y^2 = p^2$  و  $x > 0$  و  $y > 0$

بما أن  $p$  أولي ويختلف عن 2 فإن  $p$  فردي وبالتالي  $p^2$  فردي.

لدينا عندئذ  $x^2 + y^2 = p^2$  فردي.

لكن مجموع عددين لهما نفس الشفعية هو عدد زوجي

إذن  $x^2$  و  $y^2$  أحدهما زوجي والآخر فردي.

وبما أن العدد ومربعه لهما نفس الشفعية فإن  $x$  و  $y$  أحدهما زوجي والآخر فردي.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \text{ب) لدينا} \quad \begin{cases} 0 < x < p \\ 0 < y < p \end{cases} \quad \text{ومن هنا نجد} \quad \begin{cases} 0 < x^2 < p^2 \\ 0 < y^2 < p^2 \end{cases}$$

إذن نستنتج أن  $x$  و  $y$  لا يقبلان القسمة على  $p$ .

ج) لتكن  $d = \text{PGCD}(x, y)$  إذن  $d$  يقسم  $x$  و  $y$

وبالتالي  $d^2$  يقسم  $x^2$  و  $y^2$  وعليه  $d^2$  يقسم  $p^2$

- إذا كان  $d^2 = p^2$  فإن  $d = p$  وهذا خطأ كون  $x$  و  $y$  لا يقبلان القسمة على  $p$

- إذا كان  $d^2 = p$  فإن  $p$  له قاسم آخر يختلف عن 1 وهذا خطأ كون  $p$  أولياً.

ومن هنا نستنتج أن  $d^2 = 1$  إذن  $\text{PGCD}(x, y) = 1$

3) أ) التحقق أن  $(|u^2 - v^2|, 2uv)$  حل لـ (E)

- إذا كان  $p = u^2 + v^2$  المعادلة (E) تكتب  $x^2 + y^2 = (u^2 + v^2)^2$

لكن  $(|u^2 - v^2|)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$

أي  $(|u^2 - v^2|)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$

ب) - إذا كان  $p = 5$  فإن  $p = 2^2 + 1^2$

إذن  $p$  من الشكل  $u^2 + v^2$  مع  $u > 0$  و  $v > 0$

الثنائية  $(|2^2 - 1^2|, 2 \times 2 \times 1)$  حل لـ (E) من السؤال 3-أ)

إذن الثنائية  $(3, 4)$  حل خاص للمعادلة (E).

- إذا كان  $p = 13$  فإن  $p = 3^2 + 2^2$  بنفس الطريقة السابقة نبين أن الثنائية  $(5, 12)$

حل للمعادلة (E)

4) أ)  $p=3$  و  $p=7$  مجموع مربعين

نبحث هل توجد ثنائيات  $(u, v)$  من الأعداد الطبيعية

بحيث  $u^2 + v^2 = 3$  مع  $u > 0$  و  $v > 0$ .

لدينا عندئذ  $0 < u^2 < 3$  و  $0 < v^2 < 3$

وبالتالي توجد ثنائية وحيدة  $(1, 1)$  التي تحقق  $0 < u^2 < 3$  و  $0 < v^2 < 3$ .

لكن  $(1, 1)$  لا تحقق المعادلة  $u^2 + v^2 = 3$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولاً (أي 3 ليس مجموع مربعين).

- نبحث هل توجد ثنائيات  $(r, s)$  من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً بحيث  $r^2 + s^2 = 7$

لدينا عندئذ  $0 < r^2 < 7$  و  $0 < s^2 < 7$

بما أن 7 فردي و  $r$  و  $s$  لهما شفعية مختلفة فإن الثنائيات الوحيدة هي  $(1, 2)$  و  $(2, 1)$

لكن  $1^2 + 2^2 \neq 7$

إذن المعادلة (E) ليس لها حلولاً (أي 7 ليس مجموع مربعين).

ب) - نبحث عن الأعداد  $x$  و  $y$  بحيث  $x^2 + y^2 = 9$  و  $x > 0$  و  $y > 0$



لدينا إذن  $0 < x^2 < 9$  و  $0 < y^2 < 9$  ومنه ينتج  $0 < x < 3$  و  $0 < y < 3$

من السؤال (2)  $x$  و  $y$  لهما شقعية مختلفة

إذن الثنائيات الوحيدة هي  $(1, 2)$  و  $(2, 1)$  لكن  $1^2 + 2^2 \neq 9$

إذن المعادلة  $x^2 + y^2 = 9$  لا تقبل حلولاً من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً

- نبحث عن الأعداد  $x$  و  $y$  بحيث  $x^2 + y^2 = 49$  و  $x > 0$  و  $y > 0$

لدينا إذن  $0 < x^2 < 49$  و  $0 < y^2 < 49$

ومنه ينتج  $0 < x < 7$  و  $0 < y < 7$

من السؤال (2) إذا كانت  $(x, y)$  حلولاً لـ  $(E)$  فإن  $x$  و  $y$  لهما شقعية مختلفة وأوليان

فيما بينهما وعليه الثنائيات التي تحقق هذه الشروط هي

$(2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (5, 4), (4, 5)$

$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3)$

نستطيع التحقق أنه ولا ثنائية من هذه الثنائيات تحقق المعادلة  $x^2 + y^2 = 49$

إذن المعادلة  $x^2 + y^2 = 49$  لا تقبل حلولاً من الأعداد الطبيعية الموجبة تماماً

1

بين أنه يوجد على الأقل عددين صحيحان  $k$  و  $n$  بحيث  $13k - 23n = 1$

(2) حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $-156x + 276y = 24$

2

عين الثنائيات  $(x, y)$  من الأعداد الطبيعية بحيث  $2m + 7d = 11$

حيث  $d = PGC D(x, y)$  و  $m = PPC M(x, y)$

3

(1) عين  $PGCD$  للعددين 2688 و 3024

(2) في هذا السؤال  $x$  و  $y$  عددين صحيحان

(أ) بين أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان

(1)  $2688x + 3024y = -3360$

(2)  $8x + 9y = -10$

(ب) تحقق أن الثنائية  $(1, -2)$  حل خاص للمعادلة (2)

(ج) استنتج حلول المعادلة (2)

(3)  $(o, i, j, k)$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء، نعتبر المستويين  $(p)$  و  $(q)$  ذوي

المعادلتين  $x + 2y - z = -2$  و  $3x - y + 5z = 0$  على الترتيب

(أ) بين أن  $(p)$  و  $(q)$  متقاطعان في مستقيم  $(d)$

(ب) بين أن إحداثيات نقط  $(d)$  تحقق المعادلة (2)

(ج) استنتج المجموعة  $(y)$  للنقط من  $(d)$  بحيث تكون إحداثياتها أعداد صحيحة

4

1- نعتبر المعادلة  $(E): 8x + 5y = 1$  حيث  $(x, y)$  ثنائية من الأعداد الصحيحة

(أ) عين حلاً خاصاً للمعادلة  $(E)$

(ب) حل المعادلة  $(E)$

(2)  $N$  عدد طبيعي بحيث توجد ثنائية  $(a, b)$  من الأعداد الطبيعية تحقق





$$N = 5b + 2 \text{ و } N = 8a + 1$$

(أ) بين أن الثنائية  $(a, -b)$  حل للمعادلة (E)

(ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية لـ  $N$  على 40 ؟

3- (أ) حل المعادلة  $8x + 5y = 100$  حيث  $(x, y)$  ثنائية من الأعداد الصحيحة

(ب) أرادت مجموعة من التلاميذ (بنات وذكور) أن تشتري هدية لأستاذهم فدفعوا

100 قطعة نقدية ذات قيمة 100 دج.

الذكور دفعوا 8 قطع لكل واحد منهم والبنات 5 قطع لكل واحدة منهن.

ما هو عدد عناصر هذه المجموعة ؟

5

(1) نعتبر المعادلة (E) :  $6x + 7y = 57$ ، حيث  $(x, y)$  ثنائية صحيحة.

عين ثنائية من الأعداد الصحيحة  $(u, v)$  بحيث  $6u + 7v = 1$

واستنتج حلاً خاصاً  $(x_0, y_0)$  للمعادلة (E).

(2) عين الثنائيات  $(x, y)$  من الأعداد الصحيحة حلول للمعادلة (E)

(3) لدينا  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

نعتبر المستوي  $(p)$  ذو المعادلة  $6x + 7y + 8z = 57$  ولنعتبر النقط من المستوي  $(p)$  التي

تنتمي أيضاً إلى المستوي  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$

بين أنه توجد نقطة وحيدة إحداثياتها أعداد طبيعية. ثم عين إحداثياتها.

6

(1) عين كل الثنائيات  $(a, b)$  من الأعداد الطبيعية بحيث :

$$d = \text{PGCD}(a, b) \text{ و } m = \text{PPCM}(a, b) \text{ مع } 8m = 105d + 30$$

(2) حل في  $\mathbb{N}^2$  المعادلة  $\text{PPCM}(x, y) - 9\text{PGCD}(x, y) = 13$

(3) حل في  $\mathbb{N}^2$  الجملتين التاليتين :

$$\begin{cases} xy = 1350 \\ \text{PPCM}(x, y) = 90 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} xy = 1690 \\ \text{PPCM}(x, y) = 130 \end{cases}$$

7

$n$  عدد صحيح كفي و  $a = n^3 - 2n + 5$  و  $b = n + 1$

(1) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح  $n$  لدينا  $a = (n^2 - n - 1)b + 6$

(2) برهن أن  $\text{PPCM}(a, b) = \text{PGCD}(b, 6)$

(3) من أجل أي قيمة  $n$  بحيث يكون  $\text{PGCD}(a, b) = 3$

(4) عين  $n$  بحيث يكون العدد  $\frac{a}{b}$  عدداً صحيحاً.

8

أوجد جميع الثنائيات  $(x, y)$  الصحيحة

$$\text{بحيث } x + y = 40 \text{ و } \text{PGCD}(x, y) = 2$$

(2) بين أنه لا توجد أي نقطة ذات إحداثيات صحيحة على القطع الزائد ذو المعادلة :

$$3x^2 - y^2 = 1$$

$$(3) \text{ حل في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = Z$$

9

$P$  عدد أولي أكبر أو يساوي 7

الهدف من هذا التمرين هو إثبات أن  $n = p^4 - 1$  يقبل القسمة على 240 ثم تطبيق هذه النتيجة.

(1) باستعمال الموافقة بترديد 3 برهن أن  $n$  يقبل القسمة على 3.

(2) بملاحظة أن  $P$  فردي برهن أنه يوجد عدد طبيعي  $k$  بحيث :

$$p^2 - 1 = 4k(k+1) \text{ ثم بين أن } n \text{ يقبل القسمة على } 16.$$

(3) باستعمال الموافقة بترديد 5 برهن أن 5 يقسم  $n$

4- (أ) برهن أنه إذا كان  $a$  يقسم  $c$  وإذا كان  $b$  يقسم  $c$  مع  $a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما فإن  $ab$  يقسم  $c$ .

(ب) استنتج من الأسئلة السابقة أن 240 يقسم  $n$ .

(5) هل يوجد 15 عدداً أولياً  $p_1, p_2, \dots, p_{15}$  أكبر من أو يساوي 7 بحيث العدد

$$A = p_1^4 + \dots + p_{15}^4$$
 يكون أولياً .

10

نعتبر المتتاليتين  $(x_n), (y_n)$  العرفيتين على  $\mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases} \text{ و } y_0 = 8 \text{ و } x_0 = 1$$

برهن بالتراجع أن النقط  $M_n$  ذات الإحداثيات  $(x_n, y_n)$  تقع على مستقيم (A)

يطلب إعطاء معادلة له. ثم استنتج أن  $x_{n+1} = 4x_n + 2$

(2) برهن بالتراجع أن كل الأعداد  $x_n$  طبيعية، ثم استنتج أن كل الأعداد  $y_n$

طبيعية أيضاً

(3) برهن أن :

(أ)  $x_n$  يقبل القسمة على 3 إذا وفقط إذا كان  $y_n$  يقبل القسمة على 3

(ب) إذا كان  $x_n$  و  $y_n$  لا يقبلان القسمة على 3 فإنهما أوليان فيما بينهما .



1-4) برهن بالتراجع أن  $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$

(ب) استنتج أن  $4^n \times 5 - 2$  مضاعف للعدد 3 من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

نعتبر المعادلة  $138x - 55y = 5$  حيث  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ .

(1) برهن أنه إذا كانت الثنائية  $(x_0, y_0)$  حلاً للمعادلة (E) فإن  $x_0$  مضاعف للعدد 5

(2) حل المعادلة (E)

(3) ليكن  $(x_0, y_0)$  حلاً للمعادلة (E) ونضع  $d = \text{PGCD}(x_0, y_0)$

ما هي القيم الممكنة لـ  $d$  ؟

(4) عين الحلول  $(x_0, y_0)$  للمعادلة (E) بحيث  $x_0$  و  $y_0$  أوليان فيما بينهما ؛

(5) ليكن  $(\Delta)$  مستقيم معادلته  $138x - 55y = 5$

عين مجموعة النقاط  $M$  من ذات الإحداثيات  $(x, y)$  بحيث  $x$  و  $y$  أعداد

صحيحة و  $OM^2$  يقبل القسمة على 5 .

1) احسب بدلالة  $n$  مجموع  $n$  حد الأولى للأعداد الطبيعية غير العدمية

2) باستعمال البرهان بالتراجع بين أن :

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [1 + 2 + \dots + n]^2$$

3) نضع  $S_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$  عين عن  $S_n$  بدلالة  $n$ .

4) نضع  $D_n = \text{PGCD}(S_{n+1}, S_n)$  احسب  $D_n$

(أ) في حالة  $n$  زوجي ( $n = 2k$ )

(ب) في حالة  $n$  فردي ( $n = 2k+1$ )

5) استنتج من أجل كل  $n \geq 1$  أن  $D_n$  يختلف عن 1 وأن ثلاثة حدود متتالية

$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}$  للامتتالية  $(S_n)$  ليس لهم أي قاسم مشترك عدا 1 .

1) أوجد العدد الأولي  $p$  بحيث  $17p + 1$  مربع تام

2)  $a$  و  $n$  عدنان طبيعيان أكبر تماماً من 1 و  $a^n - 1$  أولي

برهن أن  $a = 2$  و  $n$  أوليان.

لتكن الفرضية التالية "إذا كان  $p$  و  $8p-1$  أوليين فيما بينهما فإن  $8p+1$  ليس أولي"

1) تحقق أن هذه الفرضية صحيحة من أجل  $p = 3$

2) برهن باستعمال الموافقة بترديد 3 أن الفرضية السابقة دوماً صحيحة

1) برهن أن المعادلة (E)  $109x - 226y = 1$  ..... حيث  $(x, y)$  أعداد صحيحة،

لها كحلول الثنائيات الصحيحة من الشكل  $(141 + 226k, 68 + 109k)$

حيث  $k$  عدد صحيح

(ب) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد  $d$  أصغر أو يساوي 226 وعدد طبيعي وحيد

غير معدوم  $e$  بحيث  $109d = 1 + 226e$ ، ثم حدد قيم  $d$  و  $e$

(2) برهن أن 227 عدد أولي.

(3) نسمي  $A$  مجموعة الأعداد الطبيعية  $a$  بحيث  $a \leq 226$

نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  من  $A$  في  $A$  المعرفتين كما يلي :

من أجل كل عدد  $a$  فإن الدالة  $f$  ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a^{109}$  على 227

من أجل كل عدد طبيعي  $a$  من  $A$  الدالة  $g$  ترفق باقي القسمة الإقليدية للعدد  $a^{141}$

على 227

(أ) تحقق أن  $g(f(0)) = 0$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $a$  من  $A$  يكون  $[227] a^{226} = 1$

باستعمال 1- (ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $a$  من  $A$

يكون  $g(f(a)) = a$

ماذا يمكن القول عن  $g(f(a)) = a$  ؟